1152. 分布函數ノ誘導ニ就イテ

宮澤光一(小樽高商)

近年発達シテ来タ小標本ノ理論，或ハ統計的假設検定論ニ於テ、一番基本ニナッテキルモノハ，各種統計量ノ分布函数デアリマス。χ^2-分布, S^2ノ分布, *Fisher*' t-分布等ガ或ハ解析的ニ 或ハ幾何学的ニ求メラレテキマスガ、ソレヲ統一的立場カラ一括シテ誘導シテミタイト思フ

デアリマス。

x, y ヲ互ニ独立ナ偶然量トシ、ソノ分布函數（普通確率密度ト云ハレテヰルモノデス）ヲ夫々 $f(x)$, $g(y)$ トスレバ $z=x+y$ ノ分布函數 $h(z)$ ハ

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx$$

即チ、f ト g トノ Faltung $h=f*g$ トシテ得ラレル譯デスガ、正規分布及ビ Γ－分布ノ一系ガ Faltung ニ對シテ閉ヂテヰルコトガ、コレカラノ推論ノ據リ所デアリマス。

§1. 正規分布ガ Faltung ニ對シテ閉ヂテヰルコト。

コレハ良ク知ラレテヰルコトナノデ、記号ト結果トダケヲ書イテオクコトニシマス。即チ平均値 m, 標準偏差 σ ナル正規分布ヲ $\phi_\sigma(x,m)$ デ表ハス。即チ

$$\phi_\sigma(x,m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

又、Faltung ノ結果ハ

$$\phi_{\sigma_1}(x,m_1)*\phi_{\sigma_2}(x,m_2)*\cdots\cdots*\phi_{\sigma_k}(x,m_k)$$

$$=\phi_{\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_k^2\}^{1/2}}(x,m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k)$$

§2. 一系ノ Γ－分布ガ Faltung ニ對シテ閉ヂテヰルコト。

order p ナル Γ－分布トハ次ノ如キモノヲイフ。

$(p>0)$

$$\gamma_\sigma(x, p) = \begin{cases} 0 & \text{for } x<0 \\ \dfrac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{for } x \geqq 0 \end{cases}$$

x, y ガ互ニ独立デ夫々 Γ－分布 $\gamma_\sigma(x, p)$, $\gamma_\sigma(y, q)$ ヲナストスル。然ラバ $z=x+y$ ノ分布函数ハ

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\sigma(x, p)\gamma_\sigma(z-x, q)\,dx$$

デアルガ、被積分函数ハ $x<0$ 及ビ $z-x<0$ ナルトキ恒等的ニ零トナルカラ

$$h(z)=\int_0^z \gamma_\sigma(x,p)\gamma_\sigma(z-x, q)\,dx = c_1 c_2 \int_0^z x^{p-1}(z-x)^{q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dx$$

$$= c_1 c_2 e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \int_0^z x^{p-1}(z-x)^{q-1} dx$$

但シ $c_1 = \dfrac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)}$, $c_2 = \dfrac{1}{(2\sigma^2)^q \Gamma(q)}$

$$= c_1 c_2 e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \int_0^1 z^{p+q-1} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

$$= c_1 c_2 z^{p+q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} B(p, q) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{p+q}\Gamma(p+q)} z^{p+q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$$

即チ $\quad h(z) = \gamma_\sigma(z, p+q)$

カクシテ，一般ニ次ノ関係成立ス。

$$\gamma_\sigma(x, p_1) * \gamma_\sigma(x, p_2) * \cdots\cdots * \gamma_\sigma(x, p_K)$$
$$= \gamma_\sigma(x, p_1+p_2+\cdots\cdots+p_K)$$

§3. $y=(x-m)^2$ ノ分布

x ガ正規分布 $\phi_\sigma(x, m)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

ヲナストキ

$$y=(x-m)^2$$

ノ分布函數ヲ求メル。

$x \geqq m$ ナル部分ノミデ考ヘレバ

$$x-m=y^{\frac{1}{2}},\quad dx=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

ナルガ，$x \leqq m$ ナル部分デモ分布ハ同樣ナル故，y ノ分布函數トシテハ

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore\quad g(y)=\gamma_\sigma(y, \tfrac{1}{2})$$

§4. χ^2－分布

以上ヨリ直チニ得ラレル結果トシテ先ヅ χ^2－分布ヲ求メル。

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ヲ $\phi_\sigma(x, m)$ ナル母集團カラノ n－sample トシ

$$\chi^2=\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2}{\sigma^2}$$

トオケバ $\dfrac{x_k}{\sigma}$ ハ平均値 $\dfrac{m}{\sigma}$ ノ周リニ標準偏差 1 ヲモッテ正規分布ヲナス．ヨッテ $y_k=\left(\dfrac{x_k}{\sigma}-\dfrac{m}{\sigma}\right)^2$ トオケバ，ソノ分布ハ $\gamma_1(y_k, \frac{1}{2})$ ナリ。

而モ，$y_1, \cdots\cdots, y_n$ ハ互ニ独立ナル故 §2 カラ χ^2 一分布トシテ次ヲ得ル。

$$f(x^2) = \gamma_1\left(x^2, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(x^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

§5. 見本平方偏差 s^2 ノ分布

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ヲ母集團 $\phi_\sigma(x, 0)$ カラノ n-sample トシ，

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots\cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$但シ\quad \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

ノ分布ヲ求メル。$x_1-\bar{x}, \cdots\cdots, x_n-\bar{x}$ ガ互ニ独立ナラ、上ノ如クシテ求マルノデアルガ従属シテ井ルタメ次ノ変換ヲナス。

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{\sqrt{n}} \\ y_2 = c_{21}x_1 + \cdots\cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + \cdots\cdots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

コヽニ c_{ik} ハ上ガ直交変換ナル如ク定メルモノトス。コレハ常ニ可能ナリ。然ラバ

$\sum y_k^2 = \sum x_k^2$，$n\bar{x}^2 = y_1^2$ ナルコトカラ

$$n s^2 = \sum_1^n x_k^2 - n\bar{x}^2 = \sum_1^n y_k^2 - y_1^2 = \sum_2^n y_k^2$$

而シテ x_i's ハ独立ナル故 y_i's モ独立ナリ。

而モ y_i ハ平均値0ノ周リニ標準偏差

$$\left(\sum_{K=1}^{n} c_{iK}^2\sigma^2\right)^{1/2} = \sigma\left(\sum c_{iK}^2\right)^{1/2} = \sigma$$

ヲモッテ正規分布ヲナス故，以上ニヨリ

$$f(ns^2)\,d(ns^2) = \gamma_\sigma\left(ns^2, \frac{n-1}{2}\right) d(ns^2)$$

$$= \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(ns^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}\,d(ns^2)$$

$$\therefore\quad f(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(s^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \gamma_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(s^2, \frac{n-1}{2}\right)$$

コノ関係ハ後ニ Student ノ分布ヲ求メルトキニ利用スル。

§6. Student ノ z-分布及ビ Fisher ノ t-分布.

先ヅ

$$\begin{cases} f(w) = \gamma_\sigma(w,p) = \dfrac{1}{(2\sigma^2)^p\,\Gamma(p)}\,w^{p-1} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} \\[2ex] f(u) = \phi_\sigma(u,m) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

ナルトキ

$$v = w^{\frac{1}{2}}$$

トシ

$$z = \frac{u-m}{v}$$

ノ分布函數ヲ求メル。*Student* ノ分布ハコノ特殊ノ場合トシテ含マレルノデアル。

$$c w^{p-1} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} dw = 2c v^{2p-1} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

但シ $c = \dfrac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)}$

ヨッテ，u 及ビ v ノ *joint distribution* ハ

$$c' v^{2p-1} e^{-\frac{(u-m)^2+v^2}{2\sigma^2}} du dv$$

但シ $c' = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma (2\sigma^2)^p \Gamma(p)}$

z 及ビ v ニツイテ考ヘレバ

$$u - m = zv, \quad du = v dz$$

ナル故

$$= c' v^{2p} e^{-\frac{(1+z^2)v^2}{2\sigma^2}} dz dv$$

ヨッテ，z ノ分布函數ハ

$$f(z) = c' \int_0^\infty v^{2p} e^{-\frac{(1+z^2)v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$v=\sqrt{2}\,\sigma(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}t$$

ト変換スレバ

$$f(z)=c'\int_0^\infty(\sqrt{2}\,\sigma)^{2p}(1+z^2)^{-\frac{2p}{2}}t^{2p}e^{-t^2}\sqrt{2}\,\sigma(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(2\sigma^2)^p\Gamma(p)}(\sqrt{2}\sigma)^{2p+1}(1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}}\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^\infty t^{2(p+\frac{1}{2})-1}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}(1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}}$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{B(p,\frac{1}{2})}(1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}}$$

サテ *Student* ノ z トハ，$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ヲ母集團 $\phi_\sigma(x, m)$ カラノ *n-sample* トシ

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n},\quad s^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$$

トスルトキ

$$z=\frac{\bar{x}-m}{s}$$

デアル．而シテ

$$f(s^2)=\gamma_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(s^2, \frac{n-1}{2}\right),\quad f(\bar{x})=\phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(\bar{x}, m)$$

ナコトカラ，上ノ結果ヲ用ヒレバ直チニ

$$f(z)=\frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2}\right),\ \frac{1}{2}}(1+z^2)^{-\frac{n}{2}}$$

ヲ得．

Fisher ノ t トハ

$$t=\frac{(\bar{x}-m)(n-1)^{1/2}}{s}$$

ナル故 $z=(n-1)^{-\frac{1}{2}}t$ ナルコトヲ用ヒテ, Fisher ノ t－分布トシテ

$$F_n(t)=\frac{1}{(n-1)^{1/2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

ヲ得。

§7. 二ツノ見本平均ノ差ノ著ルシサノ判定。

$x_1,\cdots\cdots,x_{n_1};\ y_1,\cdots\cdots,y_{n_2}$ ナル二組ノ sample ガアルトキ，コレラガ共ニ同一母集團 $\phi_\sigma(x,0)$ カラノ sample ト考ヘルコトガ出來ルカ否カヲ判定スルノニ、ソノ見本平均

$$\bar{x}=\frac{x_1+\cdots\cdots+x_{n_1}}{n_1},\qquad \bar{y}=\frac{y_1+\cdots\cdots+y_{n_2}}{n_2}$$

ノ差 $\bar{x}-\bar{y}$ ノ分布ガ問題トナル。

$$f(\bar{x})=\phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}(\bar{x},0),\quad f(\bar{y})=\phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}(\bar{y},0)$$

ナル故 $\bar{x}-\bar{y}$ ハ標準偏差

$$\left(\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right)^{1/2}=\left(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\right)^{1/2}\sigma$$

ヲモッテ正規分布ヲナス。ヨッテ

$$u=\left(\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}\right)^{1/2}(\bar{x}-\bar{y})$$

ハ標準偏差σヲモッテ正規分布ヲナス。即チ

$$f(u)=\phi_\sigma(u,0)$$

モシ，σが既知ナラコレデ良イが，一般ニσハ不明デアル。コレヲ切リ抜ケルタメ次ノ変換ヲナス。

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{x_1+\cdots\cdots+x_{n_1}}{\sqrt{n_1}} \\ u_2=c_{21}x_1+\cdots\cdots+c_{2n_1}x_{n_1} \\ \vdots \\ u_{n_1}=c_{n_1 1}x_1+\cdots\cdots+c_{n_1 n_1}x_{n_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1=\dfrac{y_1+\cdots\cdots+y_{n_2}}{\sqrt{n_2}} \\ v_2=d_{21}y_1+\cdots\cdots+d_{2n_2}y_{n_2} \\ \vdots \\ v_{n_2}=d_{n_2 1}y_1+\cdots\cdots+d_{n_2 n_2}y_{n_2} \end{cases}$$

コヽニ係数c_{ik}，d_{ik}ハ上が直交変換ナル如ク定メルモノトス。然ルトキ

$$s_1^2=\frac{1}{n_1}\sum(x_i-\bar{x})^2,\quad s_2^2=\frac{1}{n_2}\sum(y_2-\bar{y})^2$$

トオケバ

$$w=n_1s_1^2+n_2s_2^2=\sum x_i^2-n_1\bar{x}^2+\sum y_i^2-n_2\bar{y}^2$$

$$=\sum u_i^2-u_1^2+\sum v_i^2-v_1^2$$

$$=u_2^2+\cdots\cdots+u_{n_1}^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_{n_2}^2$$

而シテ，前ト同様u_i，v_iハ共ニ標準偏差σヲモッテ平均値0ノ周リニ正規分布ヲナシ，且ツ互ニ独立ナル故§4ニヨリ

$$f(w)=\gamma_\sigma\left(w,\frac{n_1+n_2-2}{2}\right)$$

故ニ§6ヨリ

$$z = \frac{u}{w^{1/2}} = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)^{1/2} \frac{\overline{x} - \overline{y}}{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^{1/2}}$$

ナル変量ノ分布函數ハ

$$f(z) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}, \frac{1}{2}\right)} (1 + z^2)^{-\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}}$$

トシテ與ヘラレル。